

Câu 1. (2,0 điểm)

a) Tính tích phân $T = \int_0^1 x^2(1-x)^{2020} dx$

b) Rút gọn: $T = \frac{C_{2020}^0}{3} - \frac{C_{2020}^1}{4} + \frac{C_{2020}^2}{5} - \frac{C_{2020}^3}{6} + \dots - \frac{C_{2020}^{2019}}{2022} + \frac{C_{2020}^{2020}}{2023}.$

Câu 2. (2,0 điểm) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông có cạnh bằng a , cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên SB, SD

a) Gọi α là góc tạo bởi đường thẳng SD và mặt phẳng (AHK) , tính $\tan \alpha$

b) Tính tỉ số thể tích hai phần của khối chóp bị cắt bởi mặt phẳng (AHK) .

Câu 3. (2,0 điểm) Cho tam giác nhọn ABC trực tâm H đường cao AD với D trên BC . Gọi M là trung điểm BC và D' đối xứng với D qua M . Điểm P thuộc đường thẳng $D'H$ sao cho AP song song BC , đường tròn ngoại tiếp tam giác $\triangle AHP$ và $\triangle BHC$ cắt lại nhau tại $G \neq H$. Chứng minh $\angle MHG = 90^\circ$.

Câu 4. (1,5 điểm) Cho $f(n) = n + [\sqrt{n}], n > 0$ Chứng minh với mọi số nguyên dương m , dãy $m, f(m), f(f(m)), f(f(f(m))), \dots$ chứa ít nhất 1 số chính phương.

(kí hiệu $[x]$ là phần nguyên của số thực x , tức là số nguyên lớn nhất không vượt quá x)

Câu 5. (1,5 điểm) Tìm tất cả các hàm $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho với mọi số thực x, y, z , ta có

$$(f(x)+1)(f(y)+f(z)) = f(xy+z) + f(xz-y)$$

Câu 6. (1,0 điểm) Giả sử với $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_{100}, b_{100})$ là các cặp sắp thứ tự phân biệt các số nguyên không âm thì N là số cặp (i, j) mà $1 \leq i < j \leq 100$ thỏa mãn $|a_i b_j - a_j b_i| = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của N khi 100 cặp số trên thay đổi.

ĐÁP ÁN ĐỀ NĂNG KHIẾU LẦN 5 LỚP 11 TOÁN-NĂM HỌC 2020-2021

Câu 1. (2,0 điểm)

a) Tính tích phân $T = \int_0^1 x^2(1-x)^{2020} dx$

b) Rút gọn: $T = \frac{C_{2020}^0}{3} - \frac{C_{2020}^1}{4} + \frac{C_{2020}^2}{5} - \frac{C_{2020}^3}{6} + \dots - \frac{C_{2020}^{2019}}{2022} + \frac{C_{2020}^{2020}}{2023}$.

Lời giải:

a) $T = \int_0^1 x^2(1-x)^{2020} dx$.

Đặt $t = 1 - x \rightarrow x = 1 - t \Rightarrow dx = -dt$,

$x = 0 \Rightarrow t = 1$

$x = 1 \Rightarrow t = 0$

Khi đó:

$$\begin{aligned} T &= -\int_1^0 (1-t)^2 t^{2020} dt = \int_0^1 (t^2 - 2t + 1) t^{2020} dt = \int_0^1 (t^{2022} - 2t^{2021} + t^{2020}) dt \\ &= \left(\frac{t^{2023}}{2023} - \frac{2t^{2022}}{2022} + \frac{t^{2021}}{2021} \right) \Bigg|_0^1 = \frac{1}{2023} - \frac{1}{1011} + \frac{1}{2021} = \frac{1}{4133456313}. \end{aligned}$$

b) Xét khai triển nhị thức newton của biểu thức:

$$\begin{aligned} x^2(1-x)^{2020} &= x^2 \left(C_{2020}^0 - C_{2020}^1 x + C_{2020}^2 x^2 - C_{2020}^3 x^3 + \dots - C_{2020}^{2019} x^{2019} + C_{2020}^{2020} x^{2020} \right) \\ &= C_{2020}^0 x^2 - C_{2020}^1 x^3 + C_{2020}^2 x^4 - C_{2020}^3 x^5 + \dots - C_{2020}^{2019} x^{2021} + C_{2020}^{2020} x^{2022} \end{aligned}$$

Lấy tích phân hai vế của đẳng thức (*) với cận chạy từ 0 đến 1 ta được:

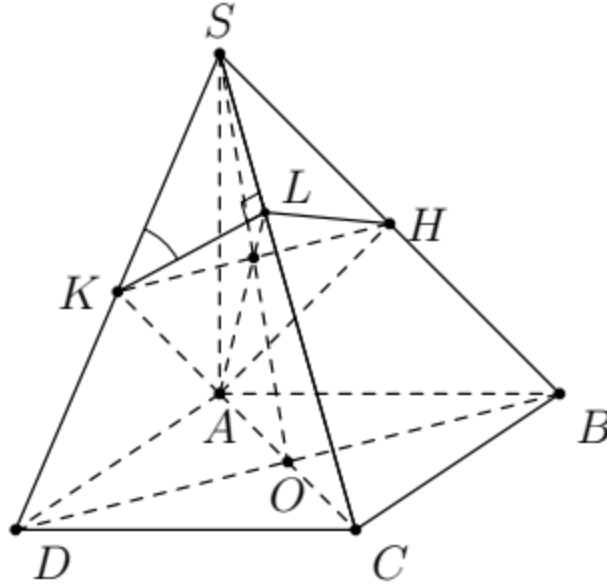
$$\begin{aligned} \int_0^1 x^2(1-x)^{2020} dx &= \int_0^1 \left(C_{2020}^0 x^2 - C_{2020}^1 x^3 + C_{2020}^2 x^4 - C_{2020}^3 x^5 + \dots - C_{2020}^{2019} x^{2021} + C_{2020}^{2020} x^{2022} \right) dx \\ &= \left(\frac{C_{2020}^0}{3} x^3 - \frac{C_{2020}^1}{4} x^4 + \frac{C_{2020}^2}{5} x^5 - \frac{C_{2020}^3}{6} x^6 + \dots - \frac{C_{2020}^{2019}}{2022} x^{2022} + \frac{C_{2020}^{2020}}{2023} x^{2023} \right) \Bigg|_0^1 \\ &= \frac{C_{2020}^0}{3} - \frac{C_{2020}^1}{4} + \frac{C_{2020}^2}{5} - \frac{C_{2020}^3}{6} + \dots - \frac{C_{2020}^{2019}}{2022} + \frac{C_{2020}^{2020}}{2023} = T \end{aligned}$$

Câu 2. (2,0 điểm) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông có cạnh bằng a , cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên SB, SD

a) Gọi α là góc tạo bởi đường thẳng SD và mặt phẳng (AHK) , tính $\tan \alpha$

b) Tính tỉ số thể tích hai phần của khối chóp bị cắt bởi mặt phẳng (AHK) .

Lời giải:



a) Gọi L là giao điểm của SC và (AHK) .

Ta có $AK \perp (SCD)$ và $AH \perp (SBC)$ nên $SC \perp (AKLH)$.

Do đó $(SD, (AHK)) = (SK, KL) = SKL = \alpha$

Xét $\triangle SAC$ ta có $SA^2 = SL \cdot SC \Leftrightarrow SL = \frac{SA^2}{SC} = \frac{a^2}{a\sqrt{3}} = \frac{a}{\sqrt{3}}$

Mặt khác $\triangle SLK \sim \triangle SDC$ nên $\frac{LK}{DC} = \frac{SK}{SC} \Leftrightarrow LK = \frac{SK \cdot DC}{SC} = \frac{\frac{a}{\sqrt{2}} \cdot a}{a\sqrt{3}} = \frac{a}{\sqrt{6}}$.

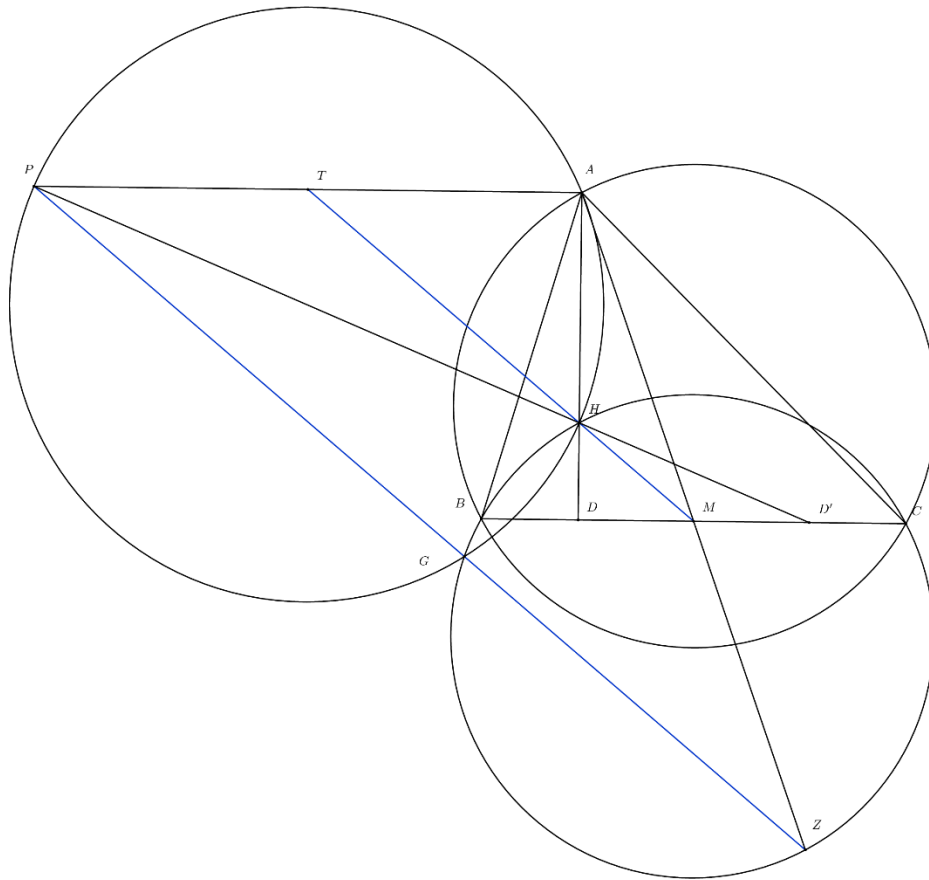
Xét $\triangle SLK$ ta có $\tan \alpha = \frac{SL}{KL} = \frac{\frac{a}{\sqrt{3}}}{\frac{a}{\sqrt{6}}} = \sqrt{2}$. Vậy $\tan \alpha = \sqrt{2}$.

b) Lại có $KH = \frac{1}{2}BD$, $AL = a\sqrt{2}3$ và $AL \perp KH$ nên diện tích $AHKL$ bằng $\frac{1}{2}KH \cdot AL = \frac{a^2}{2\sqrt{3}}$ và

$SL = \frac{a}{\sqrt{3}}$ nên thể tích khối chóp $S.AHLK$ bằng $\frac{a^3}{18}$

Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng $\frac{1}{3}a^3$ nên tỉ lệ thể tích cần tìm bằng $\frac{1}{5}$

Lời giải:



Gọi $T = HM \cap AP$ thì dễ có T trung điểm AP

Vậy $MT \parallel PZ$

Ta chứng minh G, P, Z thẳng hàng

Có B,C,Z,G thuộc một đường tròn và ABZC là hình bình hành nên

$$180^{\circ} - \angle BGZ = \angle BCZ = \angle CBA \text{ và } \angle PGB + \angle BGH = \angle PGH = \angle PAH = 90^{\circ}$$

$$\rightarrow \angle PGB = 90^\circ - \angle BGH = 90^\circ - \angle BCH = \angle ABC = 180^\circ - \angle BGZ$$

Vậy $\angle BGP = 180^0 - \angle BGZ$

Nên G,P,Z thẳng hàng.

Vậy $PG \parallel HM \rightarrow \angle MHG = \angle PGH = \angle PAH = 90^\circ$

Ta có điều phải chứng minh

Câu 4. (1,5 điểm) Cho $f(n) = n + [\sqrt{n}]$. Chứng minh với mọi số nguyên dương m , dãy $m, f(m), f(f(m)), f(f(f(m))), \dots$ chứa ít nhất 1 số chính phương.

Lời giải:

Giả sử $m = n^2 + r$, với $1 \leq r \leq n$. Khi đó $[\sqrt{m}] = n$, nên $f(m) = n^2 + n + r$. Ta vẫn có $[\sqrt{n^2 + n + r}] = n$ nên $f_2(m) = n^2 + 2n + r = (n+1)^2 + (r-1)$. Vậy nếu $r=1$, ta có $f_2(m)$ là số chính phương. Bằng quy nạp ta có được $f_{2r}(m)$ chính phương.

Bây giờ nếu $n+1 \leq r < 2n+1$, thì $f(m) = n^2 + n + r = (n+1)^2 + (r-n-1)$ và $0 = (r-n-1) < n$. Nếu $r=0$, ta có $f(m)$ là số chính phương. Nếu không $f_{2(r-n-1)}(m)$ là số chính phương.

Câu 5. (1,5 điểm) Tìm tất cả các hàm $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho với mọi số thực x, y, z , ta có

$$(f(x)+1)(f(y)+f(z)) = f(xy+z) + f(xz-y)$$

Lời giải:

Ký hiệu $P(x, y, z)$ thay cho $(f(x)+1)(f(y)+f(z)) = f(xy+z) + f(xz-y)$.

$P(0, 0, 0)$ được $f(0) = 0$ và $P(0, y, z)$ cho $f(y) = f(-y)$.

$P(x, y, 0)$ được $f(xy) = f(x)f(y)$.

Suy ra, $f(x) = f(x)f(1)$.

Nếu $f(1) \neq 1$ thì $f(x) \equiv 0$ với mọi x .

Nếu $f(1) = 1$, $P(x, 1, 1)$ được $f(x+1) = 2f(x) - f(x-1) + 2$.

Quy nạp được $f(n) = n^2$ với mọi số nguyên n . Suy ra $f(q) = q^2$ với mọi số hữu tỉ q .

Chứng minh f đồng biến với $x \geq 0$.

Có $f(x^2) = f(x)f(x) \geq 0$, nên $f(x) \geq 0$ với mọi x .

Mà $(f(x)+1)(f(y)+f(z)) = f(xy+z) + f(xz-y) \geq f(y) + f(z)$.

Đặt $x = \frac{2y}{z}$ với $z \geq 0$.

Ta có $f(\frac{2y^2}{z} + z) \geq f(z)$. Đặt $y = \sqrt{\frac{z\epsilon}{2}}$.

Ta có $f(z+\epsilon) \geq f(z)$, với mọi $z, \epsilon \geq 0$. Vậy f đồng biến

Suy ra $f(x) = x^2$ với mọi x ,

Kiểm tra lại là xong.

Câu 6. (1,0 điểm) Giả sử với $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_{100}, b_{100})$ là các cặp sắp thứ tự phân biệt các số nguyên không âm thì N là số cặp (i, j) mà $1 \leq i < j \leq 100$ thỏa mãn $|a_i b_j - a_j b_i| = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của N khi 100 cặp số trên thay đổi.

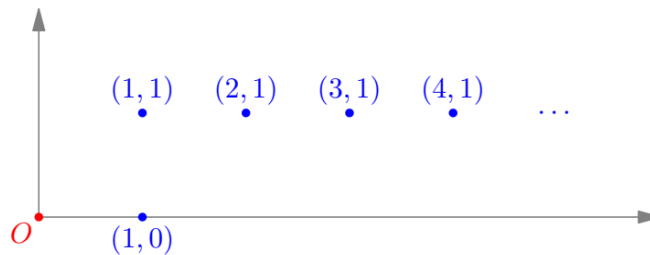
Lời giải:

Đáp số là 197 (tổng quát là $2n-3$ nếu có n cặp số)

Ý tưởng là nếu đặt $P_i = (a_i, b_i)$ là các điểm trong mặt phẳng tọa độ với gốc $O = (0, 0)$ thì bài toán trở thành: Tìm số tam giác lớn nhất $\triangle OP_i P_j$ có diện tích $\frac{1}{2}$.

(Ta gọi là tam giác đẹp)

Chọn 100 điểm P_i như sau: $(1, 0), (1, 1), (2, 1), (3, 1), \dots, (99, 1)$



Có 98 tam giác đẹp với đỉnh $(0, 0), (k, 1)$ và $(k+1, 1)$ khi $k = 1, \dots, 98$.

Có 99 tam giác đẹp với đỉnh $(0, 0), (1, 0)$ và $(k, 1)$ khi $k = 1, \dots, 99$.

Vậy có $98 + 99 = 197$ tam giác đẹp

Ta chứng minh $2n-3$ là số tam giác đẹp lớn nhất bằng quy nạp theo $n \geq 2$

Trường hợp $n = 2$ hiển nhiên

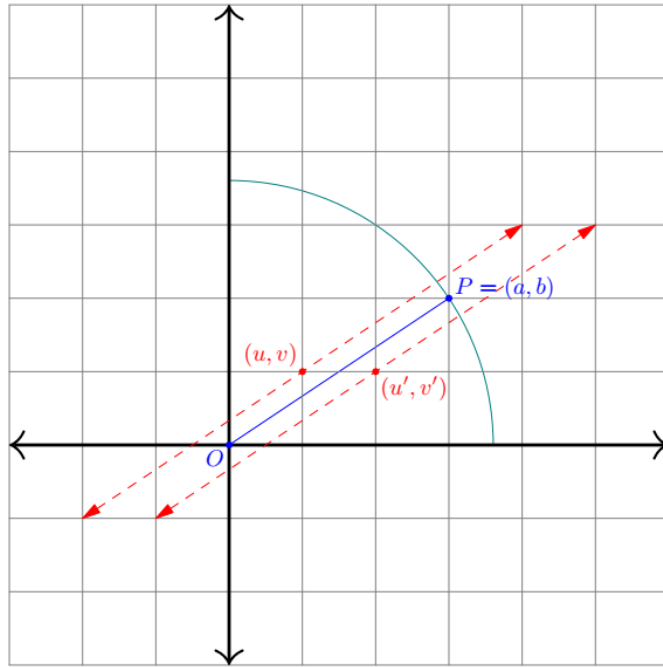
Không mất tổng quát, giả sử $P = P_n = (a, b)$ là điểm xa O nhất.

Khi đó: Điểm xa nhất $P = P_n$ thuộc cùng lắm 2 tam giác đẹp.

Thật vậy, ta có $UCLN(a, b) = 1$ với P thuộc một tam giác đẹp bất kỳ

Vì nếu $UCLN(a, b) = d$ và P thuộc tam giác đẹp OPQ thì d cũng là ước của 2 lần diện tích tam giác OPQ , tức là ước của 1.

Xét tập các điểm Q sao cho diện tích OPQ bằng $\frac{1}{2}$ thì Q chạy trên 1 trong 2 đường thẳng song song OP là d_1 và d_2



Do $UCLN(a, b) = 1$, nên chỉ có 2 điểm nguyên trên 2 đường thẳng d_1, d_2 nằm trong một phần tư hình tròn tâm O, bán kính OP, vì rõ ràng nếu có một điểm nguyên (u, v) trên d_1 thì các điểm nguyên còn lại trên d_1 phải có dạng $(u + a, v + b)$ hoặc $(u - a, v - b)$, đều thoát ra ngoài hình tròn.

Vậy nếu xóa điểm P_n thì còn $n - 1$ điểm, có cùng lắm là $2(n - 1) - 3$ tam giác đẹp. Theo nguyên lý quy nạp ta có điều phải chứng minh.